$$z = 12x_1+5x_2 + 2x_3 \text{ (max)}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ \quad 2x_1 - 5x_2 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ \geq 0\,, x_2 \ \geq 0\,, x_3 \ \geq 0$$

Решение:
Задача задана в канонической форме. Выпишем матрицу ограничений А:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как матрица А содержит неполный набор единичных векторов для выделения единичной матрицы, используем симплекс-метод с искусственным базисом. Введем вспомогательную переменную $w$ и перейдем к расширенной задаче:

F (x, w) = -w -> max

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + w = 4 \end{cases}$$

$$x_\text{j} \ \geq 0 \ (\text{j} = 1,2,3), \text{w} \geq 0$$

Новая матрица ограничений для функции F:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x_3$ и $w$ – базисные переменные. Остальные переменные, т.е. $x_1, x_2$ - небазисные переменные. Строим начальную симплекс-таблицу для F:

Таблица 1:

| *коэффи-циенты при базисных переменных* | | $x_1$ | $x_2$ | $a_0$, Свободные члены | *Отнош. своб.чл. $a_0$ к полож. элементам главного столбца* |
|---|---|---|---|---|---|
| | | *Коэффициенты при небазисных переменных* | | | |
| | | 0 | 0 | | |
| *0* | $x_3$ | 1 | 2 | 3 | 3/1=3 |
| -1 | w | **2** | -5 | 4 | **4/2=2** |
| F | | 0·1+(-1) ·2 - 0 = -2 | 0·2+(-1) · (-5) - 0 = 5 | 0·3+(-1) ·4 - 0 = - 4 | |

Таблица 1 не оптимальна. Выбираем среди всех оценок наибольшее по модулю отрицательное значение, -2, определяем столбец $x_1$ главным.
Ищем главную строку: для этого составляем соответственно отношения правых частей $a_0$ к положительным элементам соответствующих строк главного столбца, выбираем наименьшее значение среди всех. Получили, что наименьшим значением является 4/2 = 2. Определяем разрешающий элемент, лежащий на пересечении главного столбца и главной строки, таковым является элемент таблицы со значением 2, лежащий в столбце $x_1$ и строке w.

С помощью правил перехода к новому опорному решению, заполним новую симплекс-таблицу. Меняем местами элементы $x_1$ и w, заменяем разрешающий элемент обратным, т.е. ½. Элементы главного столбца делим на разрешающий элемент и меняем знак. Элементы главной строки делим на разрешающий элемент. Все остальные элементы пересчитываем по формуле:

$$x'_{ij} = \frac{x_{rs} \cdot x_{ij} - x_{rj} \cdot x_{is}}{x_{rs}},$$

где $x_{rs}$ - разрешающий элемент; $x_{ij}$ – элемент, для которого идет пересчет значений; $x_{is}$ – элемент, лежащий в главном столбце, соответственно элементу $x_{ij}$, для которого рассчитываем значение; $x_{rj}$ – элемент, лежащий в одном столбце с $x_{ij}$, соответственно разрешающей элементу $x_{rs}$.

Таблица 2:

| | w | $x_2$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|
| $x_3$ | -1/2 | 9/2 | 1 |
| $x_1$ | **1/2** | -5/2 | 2 |
| F | 1 | 0 | **0** |

Система оптимальна, т.к. нет отрицательных оценок, все оценки неотрицательны. **F* = 0.** **Зная, что критерием разрешимости задачи является оптимальное значение для вспомогательной задачи, теперь можем построить начальную симплекс-таблицу для исходной задачи.**
Вычеркиваем строку оценок и столбец, содержащий вспомогательную переменную w.
Все, что остается, записываем в новую симплекс-таблицу для z:

Таблица 3:

| | | $x_2$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|
| | | 5 | |
| *2* | $x_3$ | 9/2 | 1 |
| 12 | $x_1$ | -5/2 | 2 |
| z | | 2*9/2+12*(-2,5)-5=-26 | 2*1+12*2=26 |

Система не оптимальна, т.к. есть отрицательная оценка = -26. Делаем следующий шаг, составляем таблицу.

Таблица 4:

| | $x_3$ | $a_0$ |
|---|---|---|
| $x_2$ | 2/9 | 2/9 |
| $x_1$ | 5/9 | 23/9 |
| z | 52/9 | 286/9 |

Таблица 4 оптимальна, т.к. нет отрицательных значений в строке оценок. Расчет окончен.
Базисные переменные: $x_2$ , $x_1$
Небазисные переменные: $x_3$
X* = (23/9 ; 2/9; 0)
Z* = 12* 23/9 + 5 * 2/9 + 0 = 286/9 = 31.77